**Практичне заняття**

**Тема: Застосування визначеного інтеграла**

**Мета:** *формування умінь застосовувати інтеграл до обчислення площ плоских фігур,**об’ємів тіл.*

**План лекції:**

**1.Знаходження площ складних фігур.**

**2.Обчислення об’ємів тіл.**

**1.Знаходження площ складних фігур.**

Розглянемо декілька випадків обчислення площ геометричних фігур:

**1.** Відомо, що за геометричним змістом визначений інтеграл від невід’ємної неперервної функції на чисельно дорівнює площі ***S*** криволінійної трапеції, обмеженою функцією

**. (1)**

**2.** Якщо функція на відрізку недодатна, тобто **,**

то й визначений інтеграл від неї також буде числом недодатним, тому що він є границею інтегральних сум, а значить зберігає знак підінтегральної функції, тоді для площа криволінійної трапеції буде:

**. (2)**

**3**. Якщо функція на проміжку **[ ; b ]** змінює знак, проходячи через точку *c*, то для знаходження площі проміжок треба розбити на два проміжка та і застосувати формули (1) та (2).

Якщо функція кілька разів змінює знак на то площу фігури можна обчислити за формулою:

**(3)**

**4.** Більш складні задачі на обчислення площ розв’язують використовуючи властивість адитивності площ, тобто фігуру можна поділити на непересічні частини та обчислити площу всієї фігури як суму площ цих частин.

**5.** Якщо треба обчислити площу фігури, обмежену кривими

, заданими на відрізку причому то ця площа підраховується за формулою:

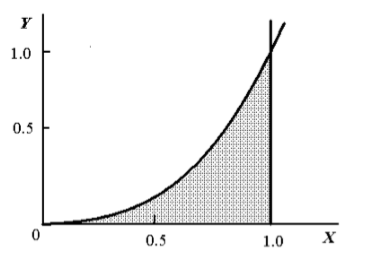
**(4)**

**6.** Якщо плоска фігура обмежена графіком неперервної на проміжку

функції прямими, та віссю ординат, то площа ***S*** знаходиться за формулою:

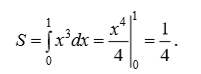
**(5)**

**Задача 1**. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції прямою та віссю



***Рис.1***

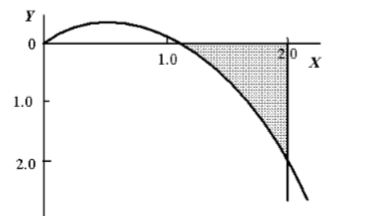
***Розвязання:***



*Відповідь:*

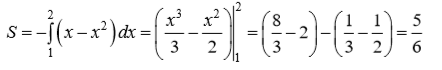
**Задача 2**. Обчислити площу фігури, обмежену лініями

(рис.2).



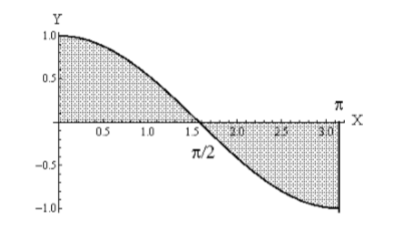
***Рис.2***

***Розвязання:***



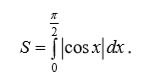
***Відповідь:***

**Задача 3**. Знайти площу фігури, що обмежена лініями



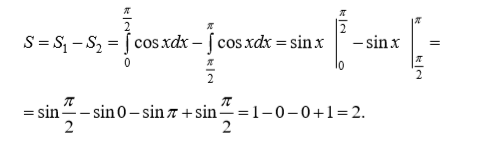
***Рис.3***

***Розв’язання:*** Площа цієї фігури буде:



Як видно з рисунка 3, площа , під кривою між точками **, –** від’ємна, значить на цьому інтервалі **,** і площу можна

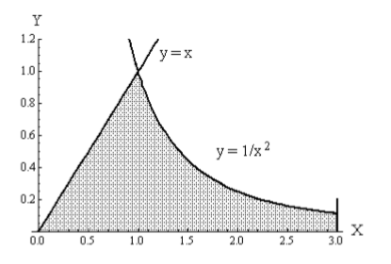
обчислити як різницю двох площ тобто



***Відповідь: 2***

**Задача 4**.Знайти площу S фігури, обмеженої лініями:





***Рис.4***

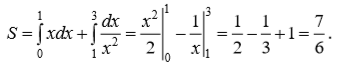
***Розв’язання:***

Дану фігуру можна розглядати як дві криволінійні трапеції, обмежені віссю абсцис (***Ох)***, прямими **,** а також графіком функції на відрізку і графіком на відрізку (рис.4). Оскільки записати первісну одноразово для цих функцій не можна, то дану криволінійну трапецію розіб’ємо прямою на дві трапеції, тоді загальна площа фігури буде дорівнювати сумі площ цих трапецій, тобто:



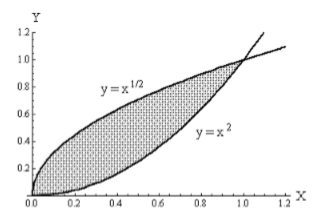


Отже,



**Відповідь:**

**Задача 5**. Знайти площу фігури, обмежену кривими і(рис.5).

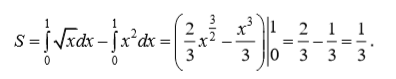


***Рис.5***

***Розв’язання:***

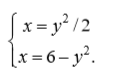
Спочатку знайдемо точки перетину і **.** Це будуть точки

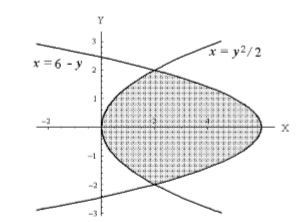
, тобто маємо відрізок **[0;1].** Як бачимо, крива проходить вище кривої , тобто на цьому відрізку тоді маємо (фомула 4):



***Відповідь:***

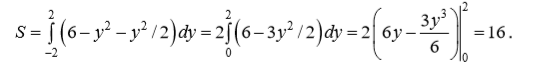
**Задача 6.** Знайти площу, обмежену кривими **,** Знайдемо точки перетину парабол. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:





***Рис.6***

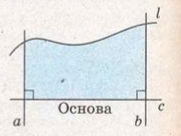
Точки перетину: **А(2; 2), В(2; -2).** Таким чином, за формулами (4), (5) площа фігури обчислюється так:



***Відповідь:*** 16

**2. Обчислення об’ємів тіл.**

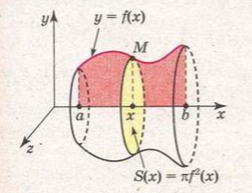
Нехай маємо на площині дві прямі, перпендикулярні до третьої, і криву, що перетинає дві перші прямі (рис. 7).



***Рис.7***

Частину площини, яка обмежена цими лініями, називають *криволінійною трапецією*. Відрізок, протилежний до відрізка кривої, називають *основою криволінійної трапеції.* Знайдемо обєм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції навколо її основи.

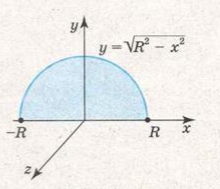
Нехай маємо криволінійну трапецію, обмежену графіком функції **,** віссю ***Ох***і прямими (рис.8).



***Рис.8***

При обертанні цієї трапеції навколо осі ***Ох*** кожна точка описує коло радіуса площа якого . Тоді об’єм даного тіла дорівнює:

Наприклад, розглянемо кулю як тіло, обмежене поверхнею обертання півкола навколо осі ***Ох*** (рис.8).



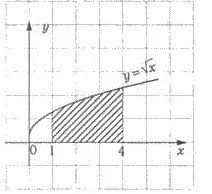
***Рис.8***

Тоді об’єм цієї кулі можна знайти за формулою:

**Зауваження:** Враховуючи симетрію тіла відносно осі ***Оу*** (тобто те, що , можна було отримати даний вираз інтегруванням від 0 до R, якщо ввести множник 2:

**Задача 7.** Знайдіть об’єм тіла, отриманого обмеженням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями ***у = ; у = 0; x = 1; x = 4.***

**Розв’язання.** Криволінійна трапеція, що обертається подана на рисунку 9.



***Рис.9***

Об’єм утвореного тіла:



***Відповідь: 7,5***

Отже, як і при обчисленні площ, ми повинні спочатку побудувати графіки функцій, при обертанні яких утворюються тіла. Якщо межі інтегрування не задані, діємо так само, як і при знаходженні площ: знаходимо абсциси точок перетину графіків, визначаємо, яка з функцій прийматиме більші значення на заданому проміжку. Різниця лише у тому, що у підінтегральному виразі ми застосвуємо не різницю алгебраїчних виразів, а ***різницю їх  квадратів.***

***Домашнє завдання:***

1.Знайдіть об’єм тіла, отриманого обмеженням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1. ***y=x2;  х=0;  х=1;  у=0;***
2. ***y=х1/2;  х=1;  х=4;  у=0;***
3. ***y=х1/2;  х=1;  у=0;***
4. ***y=1- x2;  у=0;***
5. ***y=x2;  у=х;***
6. ***y=2x;  у=х+3;  х=0;  х=1;***

***2.*** Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: ***y=sinx, y=3cosx, x=π, x=π/2.***

***3.*** Обчислити площу фігури, обмеженої прямими **у=х+4, у=2х+1, х=0, х=1.**